### <http://olimpmath.blogspot.ru/>

### *Властивості прямокутного трикутника*

* У прямокутному трикутнику сума гострих кутів рівна 900.
* Рівнобедрений прямокутний трикутник має рівні гострі кути по 450.
* У прямокутному трикутнику напроти кута 300 лежить катет, що дорівнює половині гіпотенузи.
* Площа прямокутного трикутника рівна половині добутку  його катетів.
* У прямокутному трикутнику медіана, що проведена до гіпотенузи рівна половині гіпотенузи.
* У прямокутному трикутнику кут між бісектрисами гострих кутів рівний 1350.
* У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між медіаною та висотою, що проведені з вершини прямого кута навпіл.
* У прямокутному трикутнику висота, що проведена з прямого кута розділяє трикутник його на два прямокутних трикутники, у яких рівні кути.
* У прямокутному трикутнику медіана, що проведена з прямого кута розділяє трикутник його на два необов’язково рівних рівнобедрених трикутники..
* У прямокутному трикутнику кут між медіаною та висотою, що проведені з вершини прямого кута дорівнює різниці гострих кутів трикутника.
* У прямокутному трикутнику кут між медіаною та бісектрисою, що проведені з вершини прямого кута дорівнює піврізниці гострих кутів трикутника.
* У прямокутному трикутнику кут між бісектрисою та висотою, що проведені з вершини прямого кута дорівнює піврізниці гострих кутів трикутника.
* У прямокутному трикутнику центр описаного кола  лежить в центрі гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює  половині гіпотенузи.
* У прямокутному трикутнику центр вписаного кола  лежить в точці перетину двох бісектрис, а радіус цього кола дорівнює  половині сумі катетів без гіпотенузи.
* У прямокутному трикутнику квадрат висоти, що проведена до гіпотенузи, рівний добутку проекцій катетів на гіпотенузу.
* У прямокутному трикутнику квадрат катета рівний добутку довжини проекції цього катета на гіпотенузу на довжину гіпотенузи.
* У прямокутному трикутнику точка перетину висот  лежить у вершині прямого кута.
* У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів.
* У прямокутному трикутнику площа кола побудованого на гіпотенузі, як надіаметрі, дорівнює сумі площ кіл, що побудовані на його катетах, як на діаметрах.
* У прямокутному трикутнику площа квадрату побудованого на гіпотенузі, як настороні, дорівнює сумі площ двох квадратів, що побудовані на його катетах, як на сторонах.
* Прямокутний трикутник можна розрізати на три тупокутних трикутники.
* Прямокутний трикутник можна розрізати на гострокутні трикутники.
* Прямокутний трикутник можна розрізати на три трапеції.
* Прямокутний трикутник не можна розрізати на паралелограми.
* Прямокутний трикутник можна розрізати на три чотирикутники, діагоналі яких перпендикулярні..
* У прямокутному трикутнику , якщо гострі кути відносяться, як 1:3, то бісектриса прямого кута рівна одному з катетів цього трикутника.
* У прямокутному трикутнику , якщо гострі кути відносяться, як 1:2, то медіана прямого кута рівна одному з катетів цього трикутника.
* У прямокутному трикутнику, якщо висота, проведена на гіпотенузу, ділить її на відрізки, різниця яких рівна одному з катетів трикутника, то гострі кути відносяться, як 1:2.
* У прямокутному трикутнику, якщо сторони утворюють арифметичну прогресію, то різниця цієї прогресії рівна радіусу вписаного в цей трикутник кола.
* Висота, що виходить з вершини прямого кута трикутника, рівна добутку катетів, поділеному на гіпотенузу.
* Відношення проекцій катетів на гіпотенузу дорівнює відношенню квадратів катетів.
* Якщо сторона трикутника являється діаметром його описаного кола, то протилежний їй кут – прямий, тобто трикутник прямокутний.
* Якщо квадрат найдовшої сторони трикутника рівний сумі квадратів двох інших сторін цього трикутника, то трикутник прямокутний.
* Теорема Гіппократа: Сума площ „місяців”, що лежать між дугою напівкола, яке побудоване на гіпотенузі як на діаметрі, і дугами кіл, що побудовані на катетах як на діаметрах, дорівнює площі даного трикутника.

Клітинкові фігури

**Осмислення нових знань.**

**Означення клітинкової фігури:**  Фігурка називається клітинковою, якщо вона складається з квадратиків розміром 1х1, кожен квадрати 1х1 має спільну сторону з неменше ніж одним квадратиком 1х1.

**Одноклітинковий квадратик 1х1** вважають клітинковою фігуркою.

**Зауваження.** Два квадратики 1х1 не будуть клітинковими фігурками, якщо вони мають тільки одну спільну вершину.

**Одноклітинкова** та **двоклітинкова** фігурки це відповідно квадратик 1х1 та прямокутник 1х2.

**Триклітинкових**  фігурок всього є двох видів. Це фігурки під номерами 3 та 4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 |  |  |  | 4 |  |  | 1 |  | 2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 6 |  |  |  | 7 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 8 |  |  | 9 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Дослідити види 4-клітинкові та 5-клітинкові фігурок.

**Чотириклітинкових** фігурок є п’ять видів. Це фігурки під номерами 5, 6, 7, 8, 9.

**П’ятиклітинкових** фігурок всього є 12 видів.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 |  |  |  |  |  | 11 |  |  |  |  | 12 |  |  | 16 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 13 |  |  | 14 |  |  |  |  | 15 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 20 |  |  |
| 17 |  |  |  | 18 |  |  |  |  |  | 19 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | 16 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 21 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Практична частина заняття.**

**Завдання для вироблення умінь та навичок використовувати властивості.**

1. Чи можна розрізати клітинковий квадрат 5х5 на різні 5 клітинкові фігурки?

Відповідь: так.

2. Яку найбільшу кількість клітинкових фігурок можна помістити в квадрат 5х5?

Відповідь: вісім.

3. Яку найбільшу кількість клітинкових фігурок можна помістити в квадрат 4х4?

Відповідь: п’ять.

4. Чи можна розрізати клітинковий квадрат 4х4 на: а) усі різні; б) рівні 4-клітинкові фігурки?

Відповідь: а) ні, бо усі різні;б)так, для двох видів.

6. Яку найбільшу кількість 5-клітинкових фігурок можна помістити в квадрат 4х4?

Відповідь: три.

7. Чи можна розрізати клітинковий квадрат 100х100 на: а) Т-подібні 4-клітинкові фігурки?

Відповідь: так.

8. Складіть таблицю 6-клітинкових фігурок.. Скільки видів таких фігурок?

9. Розмістіть найбільшу кількість 5-клітинкових кутиків у квадраті 5х5?

Відповідь: чотири.

10. Чи можна розрізати клітинковий квадрат 4х4 на: а) 5 різних клітинкових фігурок б) 6 різних клітинкових фігурок?

Відповідь: а)так; б) ні.

### Задачі на розфарбування олімпіадного типу

**Задачі на розфарбування олімпіадного типу**

При розв’язанні олімпіадних задач інколи клітинки, точки або інші фігури вважають розфарбованими в різні кольори в деякому порядку. Фактично це означає розбиття множини всіх даних фігур на підмножини. Розфарбування робить розв’язання більш наочним, та йміркувати за таким малюнком легше. В попередньому параграфі ми частково познайомилися з тим як розфарбування дозволяє знаходити важливі для нас закономірності. Розглянемо ще декілька прикладів.

Задача 1.На кожній клітині дошки розміром 2005х2005 сидить жук. За    свистком кожний жук переповзе в одну із сусідніх по  діагоналі клітин. При цьому в деяких клітинах можуть    виявитися по кілька жуків, а деякі клітини стануть    незайнятими. Знайдіть найменше число незайнятих    клітин.

Розв’язання. Пофарбуємо вертикалі дошки у білий та чорний кольори так, щоб сусідні вертикалі мали різний колір. Якщо перша зліва вертикаль – чорна, то у нас непарне число  к чорних та парне число n  білих клітин. Переповзаючи, кожний жук  змінює колір клітини, на якій він сидить. На чорні клітини можуть переповзти лише жуки з білих клітин. Тому не менше

k-n чорних клітин стануть вільними.     Відповідь: k-n клітин.

Запитання. В кожній клітині дошки 3\*3 сидить жук. В деякий момент всі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітини. Чи обов’язково при цьому залишиться хоча   бвільна клітинка?

Вказівка.    Нехай клітини дошки пофарбовано у білий та чорний кольори    у шаховому порядку так, що чорних клітин 13 а білих 12. Оскільки   при переповзанні жук змінює колір клітини, на якій він розташований, одна чорна клітина обов’язково буде вільною.

Задача 2. Є квадратний лист паперу в клітину 100\*100. Проведено кілька ламаних без самоперетинів, що йдуть по сторонах     клітинок та не мають спільних точок. Ці ламані лежать всередині     квадрата, лише їх кінці лежать на межі. Довести, що крім вершин     квадрата, знайдеться вузол (всередині або на межі ), який не належить жодній ламаній.

Розв’язання. Пофарбуємо всі вузли в шаховому порядку в чорний та білий кольори. Тоді кожна ламана проходить через чорний та білий вузол по черзі. Нехай всі некутові вузли межі (серед них по    рівну чорних та білих) – кінці ламаних. Тоді ми     маємо однакову кількість ламаних з двома білими     та з двома чорними кінцями. Тому загальні кількості чорних та білих вузлів на ламаних всередині  квадрата рівні ( на ламаних з білими кінцями на один чорний вузол більше, на ламаних з чорними кінцями – на один білий). Але у    нас всередині квадрату 99 і дві десятих вузлів – непарна кількість.

Запитання. Чи можна дві ламані перетнути в  трьох  точках одного кольору?

Запитання. В турнірі грають 2m команд. В першому турнірі  зустрілися між собою m пар команд і в другому турнірі зіграли  між собою m пар ( не обов’язково інші). Як довести, що тепер можна вибрати m команд, серед яких жодні дві не грали між собою?

Вказівка:

Позначимо команди  точками на площині. Команди, що  зіграли  між  собою у першому турі, з’єднаємо червоними відрізки зіграли у другому – синіми. З кожної точки виходить дварізнокольорових відрізка. Тому всі відрізки можна розбити на цикли, в  яких кольори відрізків чергуються. Різні цикли не з’єднанні між   собою і не перетинаються. З кожного циклу візьмемо половину команд, що йдуть через одну.

Запитання. Опуклий n – кутник розбитий на трикутники своїми  діагоналями, що не перетинаються, причому в кожній його вершині сходиться  непарна кількість трикутників. Чому n      кратне 3?

Обгрунтування. Якщо многокутник розбитий на частини діагоналями, що не перетинаються, то ці частини можна розфарбувати у білий та чорний кольори так, щоб частини із спільною стороною мали різний колір. Щоб обгрунтувати це, можемо спочатку вважати весь многокутник білим, а далі при  проведенні кожної діагоналі по один бік від неї змінювати кольори всіх частин, а по другий бік – зберігати     розфарбування. Оскільки в кожній вершині сходиться  непарна   кількість трикутників, всі сторони многокутника будуть лежати      трикутникам одного кольору, наприклад, чорного. А кожна проведена діагональ є одночасно стороною і чорного, і білого  трикутника. Тому n дорівнює кількості сторін чорних трикутників мінус кількість сторін білих. Обидві ці кількості, очевидно, діляться на 3, тому і n кратне 3.

Запитання 5. Площина розбита на однакові шестикутні кімнати. В деяких стінах зроблені двері так, що для будь-якої вершини, в  якій сходяться три стіни( сторони шестикутників) двері є точно в двох. Чому будь-який замкнений шлях цим лабіринтом завжди   проходить через парну кількість дверей.

Вказівка:

Всі кімнати можна пофарбувати у два кольори так, що з’єднанні дверима кімнати мають різні кольори. Для доведення спочатку  якось пофарбуємо одну кімнату, потім за нашим правилом шість її    сусідніх, потім – сусідні з вже пофарбованим і т.д. Оскільки люди   не повертається в початкову кімнату,  вона парну кількість разів змінює колір кімнати.

Тепер наведемо завдання, розв’язанню  якого допомагає розфарбування не в два кольори, а в чотири кольори.

Запитання 6. Чому не можна шашкову дошку10\*10 закласти плитками   1\*4?

Вказівка:

Використаємо діагональне розфарбування в 4 кольори,  плитка 1\*4 покриває по одній клітинці кожного кольору.

Але на дошці 10\*10 не однакова кількість клітин різних кольорів

Вправи для самостійного розв’язання

1. Куб розбито на 27 однакових кубиків. В початковий момент    жук знаходиться вцентральному кубику. З кожного кубика жук    може переходити до сусіднього, що має з ним спільну грань. Чи    зможе жук обійти всі кубики, побувавши в кожному по одному    разу?

Вказівка:Нехай всі кубики пофарбовані у білий та чорний кольори у шаховому порядку так, що центральний кубик – білий. Тоді у нас  13 білих кубиків та 14 чорних. Оскільки при переході жук змінює  колір кубика, обійти кубик він не може.

2. Дно прямокутної коробки викладемо плитками розміром    2\*2 та 1\*4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку 2\*2. Замість неї дістали плитку 1\*4. Доведіть, що викласти дно коробки   плитками тепер не вдасться.

Вказівка:Пофарбуємо дно коробки у білій та чорний кольори. Тоді кожна плитка 2\*2 покриває одну чорну клітину, а плитка 1\*4 – 2 або 0. Парність кількості плиток 2\*2 повинна співпадати з парністю кількості чорних клітин.

3. Король обійшов дошку 9\*9, побувавши точно один раз на  кожному полі. Маршрут короля не замкнений і, можливо, самоперетинається. Яка найбільша можлива довжина такого маршруту,    якщо довжина ходу по діагоналі дорівнює корінь 2, по вертикалі     або горизонталі – 1?

Вказівка:Розфарбуємо поля дошки в чорний та білий колір в шаховому    порядку. Нехай кутові поля – білі. Пофарбуймо тепер білі поля у    червоний та синій колір так, щоб поля, суміжні по діагоналі, були   різного кольору. Нехай кутові поля – сині. Тоді синіх полів на 9 більше, ніж червоних. Тому на шляху короля діагональних ділянок  по кольоровим клітинкам не менше 9.(на кожній ділянці кількість   червоних та синіх клітинок відрізняється не більше, ніж на одну),а    ділянок по чорним клітинкам не менше 8. Тому переходів з чорних

клітинок на кольорові і назад не менше 16. Кожен такий перехід   має довжину 1, тому загальна довжина маршрута  не перевищує   16 + 64 корінь 2. А маршрут з такою довжиною існує.Король має   почати шлях з лівого нижнього кута, пройти по краю одну клітину,   знов повернути на 135 градусів і пройти по діагоналі до краю, ще  пройти по краю одну клітину, знов повернути на 135 градусів і пройти по краю і т.д.

4. Правильний трикутник із стороною n розбито прямими, паралельними сторонами трикутника, на n квадратних правильних трикутників із стороною 1. По сторонах отриманих трикутників проведена незамкнена ламана, що проходить через всі вершини трикутників точно по одному разу. Доведіть, що не менше n пар сусідніх ланок ламаної утворюють між собою гострий кут.

Вказівка:

Розфарбуємо трикутники у чорний    та білий кольори.    Кожна ланка ламаної проходить постороні чорного трикутника. У нас n квадратних   ……вершин, тому ламана  має……ланок.

Всього чорних трикутників…., тому не     менше n з них містять по парі ланок утворюють гострий кут.

Задача 11.1. Хлопчик та дівчинка по черзі зафарбовують клітини  прямокутної таблиці. За один хід треба зафарбувати

дві непофарбовані клітини, які мають спільну сторону. Починає гру хлопчик, а програє той, хто не має   можливості зробити хід. Хто переможе при правильній  грі, якщо таблиця має розміри:

а) 1990\*1992;

б)1991\*1992?

Вказівка: а)Переможе хлопчик. Після кожного ходу дівчинки йому

треба зафарбувати ту пару клітинок, яка центрально – симетрична  відносно центра прямокутника клітинками, тільки що зафарбованим  дівчинкою. Простіше кажучи, ходи хлопчика повинні бути центрально симетричні ходам дівчинки. Клітинки для такого ходухлопчика завжди будуть чистими. Адже після кожного ходу хлопчика набір непофарбованих клітинок буде мати центр симетрії – центр прямокутника. І якщо дівчинка бере для свого ходу якісь дві чисті клітинки, то чистими будуть і клітинки для ходу хлопчика. Оскільки загальна кількість клітинок скінченна, гра колись скінчиться, а програти може лише дівчинка. Длястратегії хлопчика важливим буде те, що центр прямокутника лежить у вершині клітинки.

б) Виграє дівчинка. Для прямокутника 1991\*1992 центр симетрії лежить всередині спільної сторони двох клітинок, і першим ходом дівчинці треба зафарбувати ці дві клітини. Далі вона повинна робити ходи, центрально – симетричні ходам хлопчика  відносно центра прямокутника.

### Зразки задач на парність та непарність.

**ПАРНІСТЬ ТА НЕПАРНІСТЬ**

Означення. Будь-яке число, яке можна подати, як **суму двох однакових натуральних чисел**, називають парним.

**Парні числа** позначають формулою **m = 2n.**

Парних чисел безліч.

Парні числа, закінчуються на цифри: 0, 2, 4, 6, 8.

Приклади. Такі числа є парними: 2, 4, 6, 8, 56,  78, 40.

Означення. Будь-яке число, яке **не можна подати**, як суму двох однакових натуральних чисел, називають непарним.

**Непарні числа** позначають формулою **m = 2n - 1.**

Приклади. Такі числа є непарними: 21, 43, 65, 87, 56,  781, 409.

Непарних чисел безліч.

Непарні числа, закінчуються на цифри: 1, 3, 5, 7, 9.

Варто звернути увагу на те, що**сума парної кількості непарних чисел є парною.**

Узагальнення цього факту виглядає так:

**парність суми кількох чисел залежить лише від парності числа непарних доданків**:

якщо кількість непарних доданків є (не)парна, то і сума також є (не)парною.

Це можна зрозуміти з таких властивостей парності:

  2∙n + 2∙k + … + 2∙f + 2∙q = 2∙(n + k + … + f  + q) = 2∙m

**СУМА БУДЬ-ЯКОЇ КІЛЬКОСТІ ПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ ПАРНА**.

2∙n – 2∙k – … – 2∙f – 2∙q = 2∙(n – k – … – f  – q) = 2∙m

**РІЗНИЦЯ БУДЬ-ЯКОЇ КІЛЬКОСТІ ПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ ПАРНА.**

(2∙n -1)+ (2∙k-1)+ … + (2∙f-1) + (2∙q-1) = 2∙(n + k + … + f  + q)- 2s = 2∙(m-s)

**СУМА ПАРНОЇ КІЛЬКОСТІ НЕПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ ПАРНА.**

(2∙n -1)+ (2∙k-1)+ … + (2∙f-1) + (2∙q-1) = 2∙(n + k + … + f  + q)- 2s -1 = 2∙(m-s) - 1

**СУМА НЕПАРНОЇ КІЛЬКОСТІ НЕПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ НЕПАРНА.**

Таким чином, парність результату не залежить від розстановки плюсів і мінусів між цілими числами, а залежить тільки від кількості непарних чисел в початковому наборі. Зрозуміло, що сума будь-якої кількості парних чисел є  завжди парним числом.

Звертаємо увагу ще на  одну цікаву властивість.

Сума  квадратів парної кількості непарних чисел є парною.

(2∙n -1)2 + (2∙k-1)2 + … + (2∙f-1)2 + (2∙q-1)2 = 2∙p

                               (парна кількість непарних доданків)

Сума  квадратів непарної кількості непарних чисел є парною.

(2∙n -1)2 + (2∙k-1)2 + … + (2∙f-1)2 + (2∙q-1)2 = 2∙p – 1

                               (непарна кількість непарних доданків)

Зокрема, сума двох квадратів натуральних чисел  може при ділені на 4 мати остачу  0, 1, 2, але не може мати остачу 3.

Приклади:  12 + 22  = 4 + 1,    12 + 32  = 4∙2 + 2,    22 + 22  = 4∙2 + 0.

Варто запам’ятати, що  n2 + k2  4∙m + 3.

Узагальнення попередніх фактів виглядає так:

Парність суми  довільних натуральних  степенів кількох чисел залежить лише від парності числа непарних доданків:

якщо кількість непарних доданків є (не)парна, то і сума також є (не)парною.

Це можна зрозуміти з таких властивостей парності:

(2∙n)z + (2∙k)n + … + (2∙f )s + (2∙q)t = 2∙p

(будь-яка кількість  доданків)

**СУМА cтепенів БУДЬ-ЯКОЇ КІЛЬКОСТІ ПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ ПАРНА**.

(2∙n)z -  (2∙k)n  -  … - (2∙f )s  - (2∙q)t = 2∙p

                                       (будь-яка кількість  доданків)

**РІЗНИЦЯ cтепенів БУДЬ-ЯКОЇ КІЛЬКОСТІ ПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ ПАРНА.**

(2∙n -1)z + (2∙k-1)n + … + (2∙f-1)m + (2∙q-1)w = 2∙p

                                      (парна кількість  непарних доданків)

**СУМА cтепенів ПАРНОЇ КІЛЬКОСТІ НЕПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ ПАРНА.**

(2∙n -1)z + (2∙k-1)n + … + (2∙f-1)m + (2∙q-1)w = 2∙p - 1

                               (непарна кількість непарних доданків)

**СУМА cтепенів НЕПАРНОЇ КІЛЬКОСТІ НЕПАРНИХ ЧИСЕЛ ЗАВЖДИ НЕПАРНА.**

Звертаємо увагу ще на  одну цікаву і не зовсім  очевидну властивість.

**Степінь натурального числа (більша першої степені) не може бути записана у вигляді 4m + 2**. Варто запам’ятати, що  nk  4∙m + 2, де натуральне k більше 1.

Зокрема, можна довести такі властивості.

**Довільна степінь непарного числа вигляду 4∙q +1 подається у вигляді 4∙p + 1**:

(4∙q + 1)n = 4∙p + 1.

Або цю рівність можна розуміти ще отак: будь-яка степінь непарного числа вигляду 4∙q+1 при діленні на 4 дає остачу 1.

Приклади: (4∙2 +1)2 = 4∙20 + 1,    (4∙2 +1)3 = 4∙182 +1,    (4∙2 +1)4 = 4∙1640 +1.

**Непарна степінь непарного числа вигляду 4∙q + 3 подається у вигляді 4∙p + 3**:

(4∙q + 3 )2n-1 = 4∙p + 3.

Або цю рівність можна розуміти ще отак: будь-яка непарна степінь непарного числа вигляду 4∙q +3 при діленні на 4 дає остачу 3.

Приклади: (4∙2 +3)3 = 4∙332 + 3.

Парна степінь непарного числа вигляду 4∙q + 3 подається у вигляді 4∙p + 1:

(4∙q + 3 )2n= 4∙p + 1.

Або цю рівність можна розуміти ще отак: будь-яка парна степінь непарного числа вигляду 4∙q +3 при діленні на 4 дає остачу 1.

Приклади: (4∙2 + 3)2 = 4∙30 + 1,    (4∙2 +3)4 = 14640 +1.

Зразки задач на парність та непарність.

1. **На чудо-дереві ростуть банани і ананаси. За один раз дозволяється зірвати з неї два плоди. Якщо зірвати два банани або два ананаси, то виросте ще один ананас, а якщо зірвати один банан і один ананас, то виросте один банан. У результаті залишився один  плід. Який це плід, якщо відомо, скільки бананів і ананасів росло спочатку?**

Розв’язання. Парність числа бананів не міняється, тому, якщо число бананів було парним, то плід, що залишився, –  ананас, якщо число бананів було непарним, то – банан.

2. **У одній клітці квадратної таблиці 4x4  стоїть знак мінус, а в інших стоять плюси. Дозволяється одночасно міняти знак у всіх клітках, розташованих в одному рядку або в одному стовпці. Доведіть, що, скільки б ми не проводили таких змін знаку, нам не вдасться отримати таблицю з одних плюсів.**

Розв’язання. Замінимо знак «+» на число 1 і знак «—» на число  – 1. Відмітимо, що добуток всіх чисел в таблиці не міняється при зміні знаку у всіх чисел стовпця або рядка. У початковому положенні цей добуток рівний - 1, а в таблиці з одних плюсів добуток рівний  +1, чим і доведена неможливість переходу.

3. **Одним ударом Шварцнегер може розбити будь-який шматок бетону на 3 частини. Скільки ударів йому знадобитися, щоб розбити бетонну плиту  а) на 5 частин;  б) на 111 частин?**

Розв’язання. Після кожного розбивання одного шматочка на 3 частини загальна кількість шматків збільшується на 2. Тому,  якщо виконано n розбивань, то кількість шматків має бути рівною 1+ 2n. Таким чином, 1+2n = 5, звідси n = 2, тобто два удари треба, щоб мати 5 кусків, а якщо 1+2n =111, звідси n =55, тобто 55 ударів треба, щоб мати 111 кусків.

4. **Петро купив загальний зошит на 96 аркушів і пронумеру­вав всі його сторінки по порядку числами від 1 до 192. Василь вирвав з цього зошита 25 аркушів і додав всі 50 чисел, що на них були написані. Чи міг він дістати 1990?**

 Відповідь: ні, не могло.  Вказівка. На кожному аркуші сума номерів сторінок непарна, а сума 25 непарних чисел непарна.

5. **Добуток 22 цілих чисел дорівнює 1. Доведіть, що їх сума не дорівнює нулю.**

Вказівка. Серед цих чисел – парне число "мінус одиниць", а для того, щоб сума дорівнювала нулю, їх має бути рівно 11.

6. **Розмістити в квадратній таблиці 3х3,  натуральні числа від 1 до 9 так, щоб виконувалась така умови: сума  по усіх рядках, по усіх колонках, по двох діагоналях була однакова.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **2** | **7** | **6** |  | **2** | **9** | **4** |  | **4** | **3** | **8** |  | **4** | **9** | **2** |  |
| **9** | **5** | **1** |  | **7** | **5** | **3** |  | **9** | **5** | **1** |  | **3** | **5** | **7** |  |
| **4** | **3** | **8** |  | **6** | **1** | **8** |  | **2** | **7** | **6** |  | **8** | **1** | **6** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **6** | **1** | **8** |  | **6** | **7** | **2** |  | **8** | **1** | **6** |  | **8** | **3** | **4** |  |
| **7** | **5** | **3** |  | **1** | **5** | **9** |  | **3** | **5** | **7** |  | **1** | **5** | **9** |  |
| **2** | **9** | **4** |  | **8** | **3** | **4** |  | **4** | **9** | **2** |  | **6** | **7** | **2** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Вказівка.  Зрозуміло, що якщо додати усі дані то отримаємо  45. Це число вказує потроєну суму кожного рядка або кожного стовпця. Тому 45 розділимо на 3, отримаємо число 15, яке називають для числового квадрату 3х3 магічна константа. Отже,  сума по горизонталям, по вертикалям, по обом діагоналям у числовому квадраті 3х3 рівна 15.  Звертаємо увагу, що 9+1 = 8+2 = 7+3 = 4 + 6 = 10, отже числа розділилися на пари, і без пари залишилося тільки число 5.  Таким чином, середнє серед цих чисел  повинно стояти в центральній клітинці. Тоді в сусідній з нею клітинках повинні стояти або пара непарних чисел, або пара парних чисел. В кутових клітинках повинні  стояти парні числа. Знайшовши один  такий набір можна отримати ще вісім  таких квадратів за допомогою повороту навколо центральної клітинки.

7.**В ряд записано числа від 1 до 10. Чи можна розставити між ними знаки "+" та "–" так, щоб значення отриманого виразу дорівнювало нулю?**

Відповідь: ні, не можна. І справді, сума чисел від 1 до 10 дорівнює 55, і змінюючи в неї знаки, ми змінюємо весь вираз на парне число.  Зауваження. Врахуйте, що від'ємні числа також бувають парними та непарними.

8. **Чи можна скласти магічний квадрат з перших 36 простих чисел?**

Відповідь: ні, не можна. Серед цих чисел одне (це 2) – парне, а інші непарні. Тому в тому рядку, де стоїть двійка, сума чисел непарна, а в інших – парна.

**9.** **В ряд записано числа від 1 до 10. Чи можна розставити між ними знаки "+" та "–" так, щоб значення отриманого виразу дорівнювало нулю?**

Відповідь: ні, не можна. І справді, сума чисел від 1 до 10 дорівнює 55, і змінюючи в неї знаки, ми змінюємо весь вираз на парне число. Зауваження. Врахуйте, що від'ємні числа також бувають парними та непарними.

**10. Коник-стрибунець стрибає вздовж прямої, причому пер­шого разу він стрибнув на 1 см в якийсь бік, другого – на 2 см і так далі. Доведіть, що після 1985 стрибків він не може зупинитися там, де починав.**

Вказівка. Доводиться так само, як і в задачі 20, бо сума 1 + 2 + … + 1985 непарна.

**11. На дошці виписано числа 1,2,3,..., 1984, 1985. Дозволя­ється стерти з дошки будь-які два числа і замість них записати модуль їх різниці. Врешті-решт на дошці залишається одне число. Чи може воно дорівнювати нулю?**

Відповідь: ні, не може. Перевірте, що при зазначених операціях парність суми всіх написаних на дошці чисел не змінюється.

**12. Чи можна покрити шахматну дошку доміношками розмі­ром 1x2 так, щоб вільними залишились тільки клітинки а1 і, h8?**

Відповідь: не можна. Кожна доміношка покриває одне чорне і одне біле поле, а при викиданні полів а1 і h8 чорних полів залишається на 2 менше, ніж білих.

**13. До 17-цифрового числа додали число, яке записано тими ж цифрами, але в зворотному порядку. Доведіть, що хоча б одна цифра суми, що отримана, є парною.**

Вказівка. Розгляньте два випадки: сума першої і останньої цифр числа менш 10, і сума першої і останньої цифр числа не менш 10. Якщо припустити, що всі цифри суми непарні, то в першому випадку не може бути жодного переносу в розрядах (що, очевидно, приводить до суперечності), а в другому випадку наявність переносу при русі справа наліво або зліва направо чергується з відсутністю переносу, внаслідок чого ми одержимо, що цифра суми в дев'ятому розряді обов'язково парна.

**14. В народній дружині є 100 чоловік, і кожного вечора троє з них йдуть чергувати.   Чи може після деякого часу виявитися, що кожен чергував з кожним рівно один раз?**

Відповідь: ні, не може. Бо в кожному чергуванні, в якому бере участь дана людина, вона чергує з двома іншими, отже, всіх інших можна розбити на пари. Проте 99 – непарне число.

**15.  На прямій відмічено 45 точок, що лежать зовні відрізка АВ. Доведіть, що сума відстаней від цих точок до точки А не дорівнює сумі відстаней від цих точок до точки В.**

Вказівка. Для будь-якої точки X, що лежить поза АВ, маємо АХ-ВХ= ±АВ. Якщо припустити, що суми відстаней рівні, то ми отримаємо, що вираз ±АВ ± АВ ± … ± АВ, в якому 45 доданків, дорівнює нулю. Але це неможливо..

**16. По колу розставлено 9 чисел – 4 одиниці і 5 нулів. Кожну секунду над числами роблять таку операцію: між сусідніми числами ставлять нуль, якщо вони різні, та одиницю, якщо вони рівні. Чи можуть усі числа через деякий час стати рівними?**

Вказівка. Зрозуміло, що комбінація з дев'яти одиниць раніше, ніж з дев'яти нулів, утворитися не може.   Якщо ж утворилося дев'ять нулів,   то в попередньому ході нулі і одиниці повинні були чергуватися,  не можливо, бо їх всього непарна кількість.

**17. 25 хлопчиків і 25 дівчаток сидять за круглим столом. До­ведіть, що у когось із них обидва сусіди – хлопці.**

Доведення. Проведемо наше доведення від супротивного. Пронумеруємо всіх, що сидять за столом, по порядку, починаючи з якогось місця Якщо на к-му місці сидить хлопчик, то ясно, що на (к - 2)-му і на (к+ 2) му місцях сидять дівчатка. Але оскільки хлопчиків і дівчаток порівно, то і для будь-якої дівчинки, що сидить на n-му місці, вірно, що на (n— 2)-му і на (n + 2)-му місцях сидять хлопчики. Якщо ми тепер розглянемо тільки тих 25 чоловік, що сидять на "парних" місцях, то одержимо, що серед них хлопчики і дівчатка чергуються, якщо обходити стіл в якомусь напрямі. Але 25 – непарне число.

**18. Равлик повзе по площині із сталою швидкістю і кожні 15 хвилин повертає під прямим кутом. Доведіть, що повернутись до початкової точки він зможе лише після цілого числа годин.**

Доведення. Зрозуміло, що кількість а дільниць, на яких равлик повз угору або вниз, рівна кількості дільниць, на яких він повз вправо або вліво. Залишилось тільки зауважити, що а – парне.

**Задачі на властивості парності та непарності.**

**Завдання 1:** Чи існує 25-ланкова ламана, така, що перетинає кожну свою ланка рівно один раз?

**Розв’язання:** Ні. Ланки повинні розбиватися на пари пересічних

**Завдання 2:** Чи може обертатися система з 11 шестерінок, якщо 1-а зчеплена з 2-ою, 2-а – з 3-ою і так далі, а 11-а зчеплена з 1-ою?

**Розв’язання:** Ні. Напрями обертання шестерінок повинні чергуватися.

**Завдання 3:** Чи може пряма, що не містить вершин 1001-угольника, перетинати кожну його сторону?

**Розв’язання:** Ні. Будь-які сусідні дві вершини 1001-кутника повинні лежати по різні сторони від прямої.

**Завдання 4:** На клітчастому папері намальований замкнутий шлях (по лініях сітки). Довести, що він має парну довжину (сторона клітки має довжину 1) .

Розв’язання:  При проходженні шляху кроків вгору повинно бути стільки ж, скільки кроків вниз, а кроків управо - стільки ж, скільки кроків вліво.

**Завдання 5:** Равлик повзе по площині з постійною швидкістю, повертаючи на 90 градусів кожні 15 хвилин. Довести, що він може повернутися в початкову точку тільки через ціле число годин.

**Розв’язання:** Управо равлик повинен повзти стільки ж часу, скільки вліво, а вгору - стільки ж, скільки вниз. Означає равлик проповз парне число вертикальних і парне число горизонтальних «п'ятнадцятихвилинних» відрізків. До того ж вертикальні і горизонтальні відрізки чергуються, а це означає,що загальне їх число ділиться на 4.

**Завдання 6:** Довести, що будь-яка вісь симетрії 45-кутника проходить через його вершину.

**Завдання 7:** Чи може коник за 25 стрибків повернутися в початкову позицію, якщо він стрибає:

a) по прямій в будь-яку сторону на непарну відстань.

b) по площині на відстань 1 в будь-якому з 4 основних напрямів (вгору, вниз, управо, вліво).

с) по площині ходом коня (тобто, по діагоналі прямокутника 1 х2).

d) по діагоналі прямокутника ахb (а і b фіксовані).

**Розв’язання:** Рішення: d) Ні. Якщо а і b обидва непарні, то кожна координата коника при стрибку міняє парність. Якщо ж одне з чисел а і b парно, а інше непарне, то сума координат при кожному стрибку міняє парність. Якщо ж а і b обидва парні, то можна зменшувати їх удвічі до тих пір, поки одне з них не стане непарним, а після цього скористатися одним з вже розібраних випадків.

**Завдання 8:**Коник стрибає по прямій: перший раз - на 1 см, другий раз - на 2 см і так далі. Чи може він через 25 стрибків повернутися на старе місце?

**Завдання 9:** Парне чи непарне число 1 + 2 + 3 +  .  + 1990?

**Вказівка.** Порахуйте кількість непарних чисел в цій сумі.

**Завдання 10:**Набір доміно виклали в ряд за правилами. На одному кінці ланцюжки - п'ятірка. Що на іншому?

**Розв’язання:**Теж п'ятірка. П'ятірки усередині ланцюжка розбиваються на пари. Всього їх вісім на усіх кісточках.

**Завдання 11:** З набору доміно викинули всі кістки з пустушками. Чи можна що залишилися викласти в ряд за правилами?

**Завдання 12:** У виразі 1\*2\*3\* … \*9 зірочки замінюють на  -  або  + .  a) Чи може вийти 0?  b) Чи може  вийти 1?   c) Які числа можуть вийти?

**Розв’язання:** с) Всі непарні числа від  - 45 до 45.

**Завдання 13:** У кожного марсіанина три руки. Чи можуть 7 марсіан узятися за руки?

**Завдання 14:** Добуток чисел 1 і  - 1 рівне 1. Довести, що їх сума не рівна нулю.

**Завдання 15:** Чи може 25-ланкова ламана перетинати кожну свою ланку по 3 рази?

**Розв’язання:** Не може. Спробуйте підрахувати кількість точок перетину.

**Завдання 16:** Чи можна сторони і діагоналі правильного 13-угольника розфарбувати в 12 кольорів так, щоб в будь-якій вершині сходилися всі кольори?

**Завдання 17:** На дошці 25х25 розставлені 25 фішок, причому їх розташування симетрично відносне обох головних діагоналей. Довести, що одна з фішок розташована в центрі.

**Завдання 18:** Дошка 9х9 розфарбована в 9 кольорів, причому розфарбовування симетричне щодо головної діагоналі. Довести, що на цій діагоналі всі клітки розфарбовані в різні кольори.

**Розв’язання:** Простіше доводити, що кожний колір зустрічається на діагоналі.

**Завдання 19:** На шахівниці 8х8 розташовані 8 тур, які не б'ютьодин одну. Довести, що число тур, що стоять на чорних клітках, парне.

**Розв’язання:** Колір клітки визначається сумою її координат. Сума ж координат всіх тур парна (вона не залежить від розстановки і рівна 2(1 + 2 +  ….+ 8)).

**Завдання 20:** Три коники грають в чехарду: кожну секунду один з них стрибає через якесь іншого (але не через два). Чи можуть вони через 25 секунд повернутися на свої місця?

**Завдання 21:** По колу розташовано 239 точок двох кольорів. Довести, що знайдуться дві точки одного кольору, розділені рівно двома точками.

**Завдання 22:** У вершинах куба написані числа 1 і  - 1. На кожній грані написаний добуток чисел в кутках цієї грані. Чи може сума всіх написаних чисел бути рівна нулю?

**Розв’язання:** Ні. Чисел всього 8+6=14, а їх добуток рівний 1.

**Завдання 23:** У таблиці 25х25 розставлені цілі числа так, що в кожному стовпці і в кожній строчці зустрічаються всі числа від 1 до 25. При цьому таблиця симетрична щодо головної діагоналі. Довести, що на головній діагоналі всі числа від 1 до 25 зустрічаються по одному разу.

**Завдання 24:** n лицарів з двох ворогуючих країн сидять за круглим столом. Число пар сусідів-друзів рівне числу пар сусідів-ворогів. Довести, що n ділиться на 4.

Розв’язання: Число пар сусідів-ворогів завжди парне.

**Завдання 25:** По кругу написано 4 одиниці і 5 нулів. За хід між двома однаковими цифрами пишеться одиниця, а між різними - нуль (старі цифри стираються). Чи можуть через декілька ходів всі числа стати однаковими?

Розв’язання: Ні. З чого могла вийти така позиція?

**Завдання 26:** У квадраті 25 х25 розташовані числа 1 і  - 1. Обчислили всі добутки цих чисел по рядках і по стовпцях. Довести, що сума цих добутків не рівна нулю.

**Завдання 27:** По кругу розставлені нулі і одиниці (і ті та інші присутні). Кожне число, у якого два сусіди однакові, замінюють на нуль, а решта чисел - на одиниці, і таку операцію проробляють кілька разів. a) чи можуть всі числа стати нулями, якщо їх 13 штук?  b) чи можуть всі числа стати одиницями, якщо їх 14 штук?

**Завдання 28:** У вершинах n-кутника стоять числа 1 і - 1. На кожній стороні написаний добуток чисел на її кінцях. Виявилось, що сума чисел на сторонах рівна нулю. Довести, що а) n парно b) n ділиться на 4.

# Приклади розв'язування задач на парність

# Приклад 5.1. Коник стрибав вздовж прямої і повернувся в початкову точку (довжина кожного стрибка дорівнює 1 м). Довести, що він зробив парне число стрибків.

# *Розв’язання.*Оскільки коник повернувся в початкову точку, кількість стрибків вправо дорівнює кількості стрибків вліво, тому загальна кількість стрибків є парною. ■

# Приклад 5.2. Чи існує замкнена ламана з 7 ланками, яка перетинає кожну свою ланку рівно один раз?

# *Розв’язання.* Припустимо, що існує. Тоді ланки, що перетинаються утворюють пари. Тому кількість ланок повинна бути парною. Одержали суперечність. Отже, вказаної ламаної не існує. ■

# Приклад 5.3. У марсіан буває довільне число рук. Одного разу всі марсіани узялися за руки так, що вільних рук не залишилося. Доведіть, що число марсіан, у яких непарне число рук, є парним.

# *Розв’язання.* Назвемо марсіан з парним числом рук парними, а з непарним ― непарними. Оскільки руки утворюють пари, то загальне число рук парне. Загальне число рук у парних марсіан парне, тому загальне число рук у непарних марсіан теж парне. Отже, число непарних марсіан є парним. ■

# Приклад 5.4. На координатній площині намальовано коло з центром в точці (0, 0), радіус якого дорівнює 1995. У кожній з точок площини, що лежать в середині кола та обидві координати яких є цілими числами, сидить павук. У деякій момент часу кожен з павуків переповзає на одиничну відстань праворуч, ліворуч, вгору або вниз, залишаючись всередині кола (різні павуки можуть рухатись у різі боки). Чи обов’язково після переповзання два павуки зустрінуться в одній точці?

# *Розв’язання.*Кількість павуків усередині кола є непарним числом, бо кожній точці *П*(*m*, *n*), в якій сидить павук, відповідає симетрична відносно початку координат точка *П*1(−*m*, −*n*), лише точці (0, 0) немає пари. При вказаному в умові переповзанні кожен павук змінює на одиницю одну зі своїх координат, або, що те саме, змінює парність суми своїх координат. Розіб’ємо павуків на дві групи: *М*1 ― павуки з парною сумою координат, *М*2 ― павуки з непарною сумою координат. Припустимо, що після переповзання в кожній точці знову сидить рівно один павук. Це означає, що при переповзанні кожен павук групи *М*1 зайняв місце точно одного павука з групи *М*2 і навпаки, тобто в групах *М*1та *М*2 однакова кількість павуків. Це суперечить тому, що їхня загальна кількість непарна.

# Отже, в деякій точці після переповзання буде два чи більше павуків. ■

# Приклад 5.5. Чи можна всі натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших?

# *Розв’язання.*Припустимо, що можна. Тоді в кожній групі сума чисел є парним числом, тому сума всіх чисел від 1 до 65 теж має бути парною. Але сума 1 + 2 + … + 65 = 65 · 33 ― непарна. Одержали протиріччя. Отже, розбити числа вказаним способом не можна. ■

# Приклад 5.6. По колу написано в довільному порядку 4 одиниці та 5 нулів. Над ними виконують наступну операцію: між однаковими цифрами пишуть нуль, а між різними ― одиницю, після чого попередні цифри витирають. Потім таку ж операцію виконують над отриманими цифрами і т. д. Довести, що після кількох таких операцій неможливо отримати 9 нулів.

# *Розв’язання.*Припустимо, що після *k* таких операцій отримано 9 нулів. Тоді після (*k* − 1)-ої операції всі цифри на колі повинні були дорівнювати одиниці, а тому після (*k* − 2)-ої операції довільні дві сусідні цифри на колі повинні були бути різними. Тоді нулів має бути стільки, скільки й одиниць, звідки отри-муємо, що загальна кількість цифр є парним числом. Це суперечить умові. Отже, отримати 9 нулів неможливо. ■

# Приклад 5.7. Зграя мавп розташувалися по колу. Кожна мавпа має певну кількість бананів і певну кількість ананасів. Відомо, що жодні дві мавпи, які не знаходяться поруч, не в змозі відразу поділити загальну кількість бананів і ананасів (окремо тих та інших), які вони мають, порівну між собою, залишивши ласощі цілими. Скільки мавп може бути в цій зграї?

# *Розв’язання.*З умови відразу випливає, що в довільних двох мавп, які не знаходяться поруч, або сума кількостей бананів непарна, або сума кількостей ананасів непарна. Існує лише 4 різні за парністю способи надання одній мавпі бананів та ананасів: (п, п) ― парна кількість бананів і парна кількість ананасів, (п, н) ― парна кількість бананів та непарна кількість ананасів, (н, п) ― непарна кількість бананів і парна кількість ананасів, (н, н) ― непарна кількість бананів та непарна кількість ананасів. Оскільки в довільних двох мавп, які не знаходяться поруч, такі способи повинні бути різні, то отримуємо, що мавп може бути не більше 8 (у двох, але не в трьох, мавп, які знаходяться поруч, можуть бути однакові способи). Приклад 8 мавп легко сконструювати: (п, п), (п, п), (п, н), (п, н), (н, п), (н, п), (н, н), (н, н). Зрозуміло, що з такого набору можна викреслити будь-яку кількість мавп. Отже, мавп може бути не більше восьми. ■

# Приклад 5.8. Коло розбите точками на 3*k* дуг: по *k* дуг завдовжки 1, 2, і 3. Довести, що серед цих точок знайдуться дві діаметрально протилежні точки.

# *Розв’язання.*Припустимо супротивне, тобто, що таких діаметрально протилежних точок розбиття немає. Тоді отримуємо, що проти дуг завдовжки 1 лежать дуги завдовжки 3. Вилучивши дві такі діаметрально протилежні дуги завдовжки 1 та 3, отримаємо дві рівні «великі» дуги завдовжки *6k - 42=3k - 2* .

# Нехай одна з них містить *m* дуг завдовжки 1 та *n* дуг завдовжки 3, тоді протилежна містить *n* дуг завдовжки 1 та *m* дуг завдовжки 3, причому *m* + *n* = *k* – 1. Оскільки крім цих дуг кожна з «великих» дуг містить лише дуги завдовжки 2, то парність довжини «великих» дуг співпадає з парністю числа  *k* – 1. Але (3*k* – 2) – (*k* – 1) = 2*k* – 1, тобто числа 3*k* – 2 та *k* – 1 мають різну парність. Прийшли до протиріччя. Отже, обов’язково знайдуться дві діаметрально протилежні точки розбиття. ■

# Детальніше тут: [http://njestandartn-zadach.webnode.com.ua/products/prikladi-rozv'yazuvannya-zadach-na-parn%D1%96st/](http://njestandartn-zadach.webnode.com.ua/products/prikladi-rozv'yazuvannya-zadach-na-parn%D1%96st/?utm_source=copy&utm_medium=paste&utm_campaign=copypaste&utm_content=http%3A%2F%2Fnjestandartn-zadach.webnode.com.ua%2Fproducts%2Fprikladi-rozv%27yazuvannya-zadach-na-parn%25D1%2596st%2F)